



UNIUNEA EUROPEANĂ



Instrumente Structurale
2014-2020

Proiect cofinanțat din Fondul Social European prin Programul Operațional Capital Uman 2014-2020

Axa prioritară 6: *Educație și competențe*

Prioritatea de investiții 10.i: *Reducerea și prevenirea abandonului școlar timpuriu și promovarea accesului egal la învățământul preșcolar, primar și secundar de calitate, inclusiv la parcursuri de învățare formale, nonformale și informale pentru reintegrarea în educație și formare*

Obiectivul specific 6.A: *Creșterea numărului de tineri care au abandonat școala și de adulți care nu și-au finalizat educația obligatorie care se reintorc în sistemul de educație și formare, inclusiv prin programe de tip a doua șansă și programe de formare profesională*

Obiectivul specific 6.6: *Îmbunătățirea competențelor personalului didactic din învățământul preuniversitar în vederea promovării unor servicii educaționale de calitate orientate pe nevoile elevilor și a unei școli inclusive*

Titlu proiect: *„Acces la programe de educație și formare profesională pentru tinerii și adulții din județul Dolj care au părăsit timpuriu școala (II)”*

Cod SMIS 2014+: 135712

MATERIALE DE PREDARE DISCIPLINA matematica

Modulul II FORME

Unitatea de învățare: Fenomene Geometrice

Program „A doua șansă” pentru învățământ secundar inferior

Versiunea finala

A.3.1 Organizarea, monitorizarea și evaluarea programului „A doua șansă” și a stagiilor de pregătire practică de 720 de ore

Nume prenume: Ungureanu Cristina
Expert curriculum matematica

decembrie 2022

Conținutul acestui material nu reprezintă în mod obligatoriu poziția oficială a Uniunii Europene sau a Guvernului României



UNIUNEA EUROPEANĂ



Instrumente Structurale
2014-2020

UNITATEA 2 FENOMENE GEOMETRICE

ASEMĂNAREA

Asemănare înseamnă a avea însușiri, trăsături comune cu cineva sau cu ceva.

În geometria euclidiană, două obiecte sunt **asemenea** dacă ambele au aceeași formă sau unul are aceeași formă ca imaginea în oglindă a celuilalt.

Prin asemănare se măresc/ micșorează distanțele dintre puncte, dar se păstrează forma figurilor geometrice.

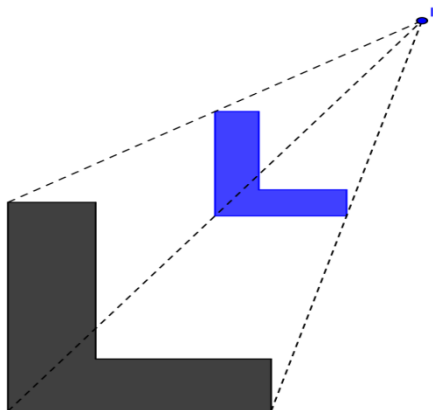
Figurile *asemenea* sunt figurile care își păstrează forma, dar nu își păstrează mărimea. Mulți dintre noi folosim *asemănarea* aproape zilnic, fără să ne dăm seama. Asemănarea este des întâlnită în viața de zi cu zi.

Dacă mărim sau micșorăm o poză de pe telefonul mobil, obținem o imagine *asemenea* cu imaginea inițială.

Un telescop sau un microscop modifică imaginile făcându-le mai ușor de vizualizat, dar raportul dintre dimensiunile imaginilor rămâne același.

Asemănarea este folosită și în fotografia digitală, atunci când o imagine trebuie tipărită pe un poster.

În concluzie, este bine să reținem că prin asemănare înțelegem o mărire sau o micșorare la scară a figurilor.



Toate cercurile sunt asemenea între ele, toate pătratele sunt asemenea între ele și toate triunghiurile echilaterale sunt asemenea între ele.

Pe de altă parte, dreptunghiurile nu sunt toate asemenea între ele, iar triunghiurile isoscelele nu sunt toate asemenea între ele.



UNIUNEA EUROPEANĂ



Instrumente Structurale
2014-2020

Raportul a două segmente este raportul lungimilor lor, măsurate cu aceeași unitate de măsură.

Segmente proporționale: patru segmente se numesc proporționale dacă se poate forma o proporție cu lungimile lor (formează două rapoarte egale)

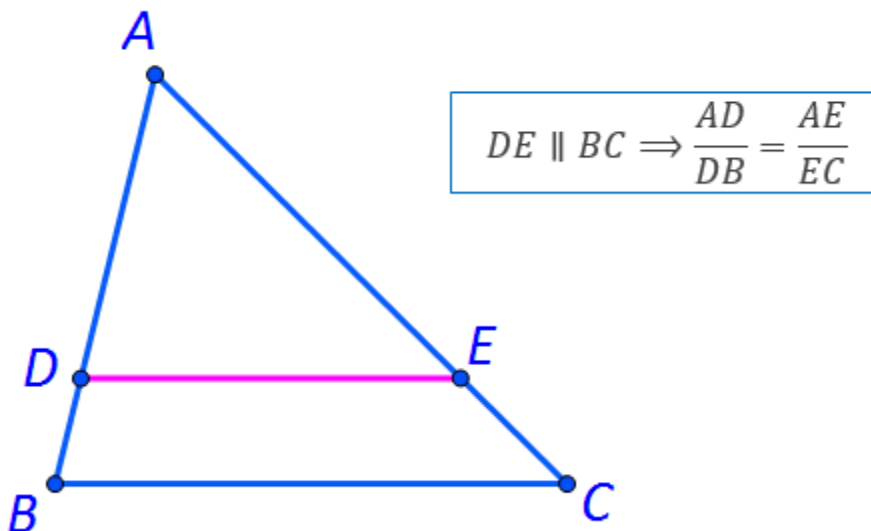
Segmentele proporționale sunt des utilizate în viața de zi cu zi. De exemplu, un telescop sau un microscop modifică imaginile făcându-le mai ușor de vizualizat, dar raportul dintre dimensiunile imaginilor rămâne același.

Thales a fost primul care a calculat înălțimea piramidei lui Keops, dar să nu vă imaginați că s-a urcat pe piramidă, el a măsurat umbra piramidei și umbra altor obiecte, determinând segmente proporționale.

Teorema lui Thales

O paralelă la una din laturile unui triunghi determină pe celelalte două laturi, sau pe prelungirile lor, segmente proporționale.

Fie triunghiul ABC, în care am construit $DE \parallel BC$. Atunci are loc relația:



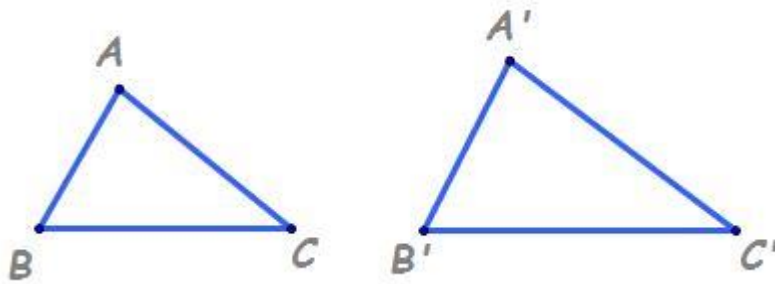
Două triunghiuri, $\triangle ABC$ și $\triangle A'B'C'$, sunt asemenea dacă și numai dacă unghiurile corespondente au aceeași măsură: acest lucru implică faptul că sunt asemenea dacă și numai dacă lungimile laturilor corespondente sunt proporționale.



UNIUNEA EUROPEANĂ



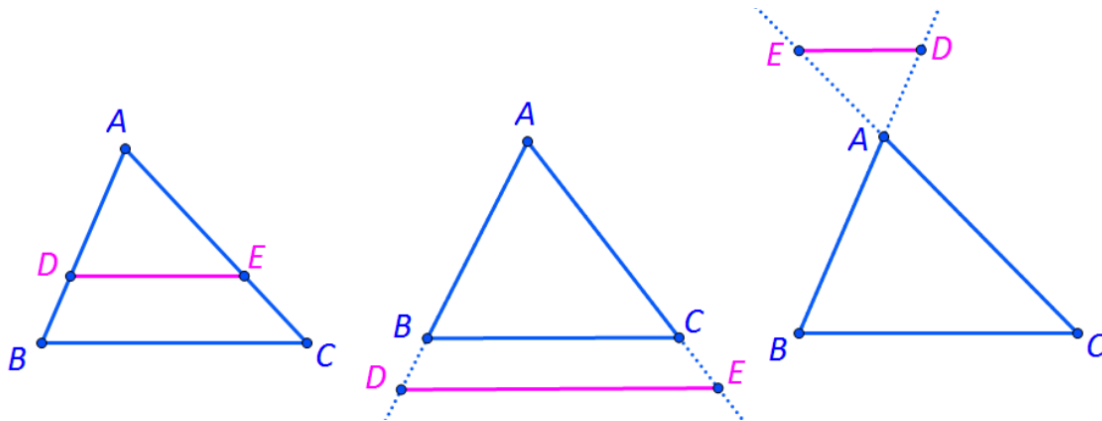
Instrumente Structurale
2014-2020



Când două triunghiuri $\triangle ABC$ și $\triangle A'B'C'$ sunt asemenea, se scrie $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

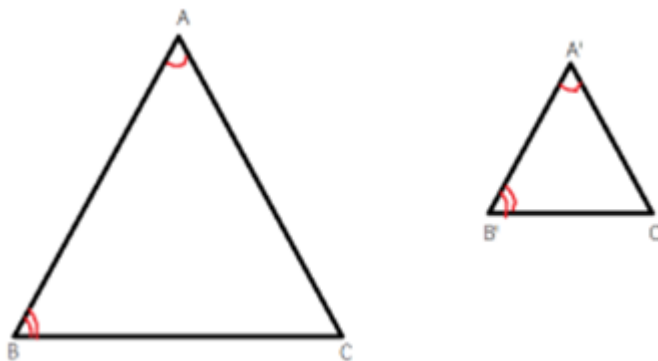
Teorema fundamentală a asemănării

O paralelă la una din laturile unui triunghi formează cu celelalte două laturi, sau cu prelungirile lor, un triunghi asemenea cu cel dat.



Criteriile de asemănare

1. Triunghiurile care au două unghiuri congruente, sunt triunghiuri asemenea.



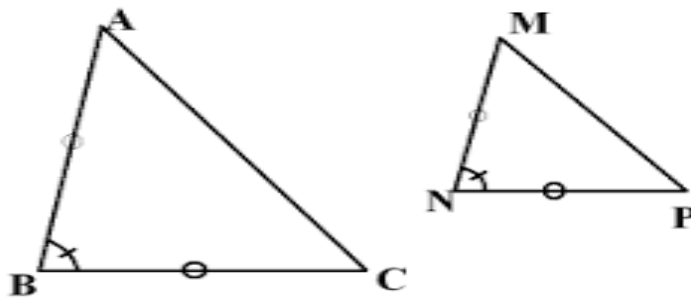


UNIUNEA EUROPEANĂ

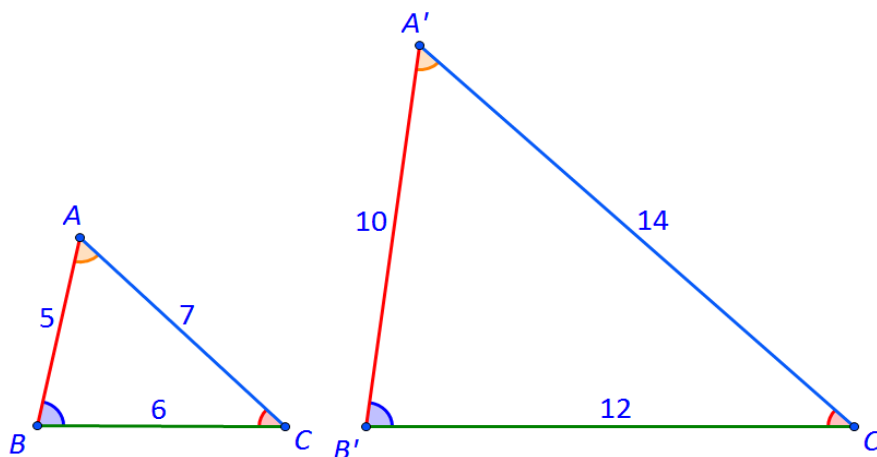


Instrumente Structurale
2014-2020

2. Dacă un triunghi are un unghi respectiv congruent cu unghiul altui triunghi și laturile care formează cele două unghiuri sunt respectiv proporționale, atunci cele două triunghiuri sunt asemenea.



3. Dacă două triunghiuri au laturile respectiv proporționale, atunci ele sunt asemenea.



Conceptul de asemănare se extinde și la poligoane cu mai mult de trei laturi.

Date fiind oricare două poligoane asemenea, laturile corespondente luate în aceeași secvență sunt proporționale și unghiurile corespondente luate în aceeași secvență sunt egale în măsură.

Cu toate acestea, proporționalitatea laturilor corespondente nu este de la sine însăși suficientă pentru a dovedi asemănarea pentru poligoane dincolo de triunghiuri (altfel, de exemplu, toate romburile ar fi asemenea).

De asemenea, egalitatea tuturor unghiurilor în secvență nu este suficientă pentru a garanta asemănarea (altfel toate dreptunghiurile ar fi asemenea).

O condiție suficientă pentru asemănarea poligoanelor este aceea ca laturile și diagonalele corespondente să fie proporționale.

Pentru oricare n , toate poligoanele regulate de ordin n sunt asemenea.

SIMETRIA

Conceptul de simetrie străbate întreaga istorie a omenirii.

Cuvântul „simetrie” are origine grecească și determină „proporționalitate, similitudine în aranjarea pieselor”. Hermann Weil a spus: „Simetria este ideea prin care omul a încercat timp de secole să înțeleagă și să creeze ordine, frumusețe și perfecțiune”

Termenul „simetria” este folosit în geometrie, dar este folosit în multe domenii științifice, iar valoarea ei rămâne neschimbată în general.

Simetria este o corespondență a unui anumit fragment al unui corp față de orice axă, atunci când structura sa este neschimbată, iar proprietățile și forma unui astfel de obiect rămân aceleași în ceea ce privește transformările sale.

Axa de simetrie este dreapta după care, dacă se îndoaie un desen, cele două părți ale desenului coincid prin suprapunere.

Acesta este un set de puncte care formează o linie dreaptă, care este baza simetriei, adică dacă o anumită distanță a fost pusă deoparte dintr-o linie dreaptă pe o parte, atunci ea se va reflecta în cealaltă direcție cu aceeași dimensiune.

Direcția și orientarea axei pot fi orice, deși adesea este fie verticală, fie orizontală.

Multe forme naturale care cresc sau se mișcă paralel cu suprafața pământului sunt simetrice în oglindă.

Ca exemple: aripile de fluture și fețele umane.

Natura este o sursă generoasă de exemple de simetrie, pornind de la corpul nostru uman care este simetric.

- Doi ochi, două urechi, un nas și o gură sunt localizați simetric față de axa centrală a feței.

- Brațele, picioarele și întregul corp sunt în general aranjate simetric față de axa care trece prin mijlocul corpului nostru.

Și exemplele sunt nenumărate, cum ar fi: flori, frunze, petale, legume și fructe, animale și chiar fagurii de albine care au o formă și o simetrie geometrice pronunțate. Toată natura este



UNIUNEA EUROPEANĂ



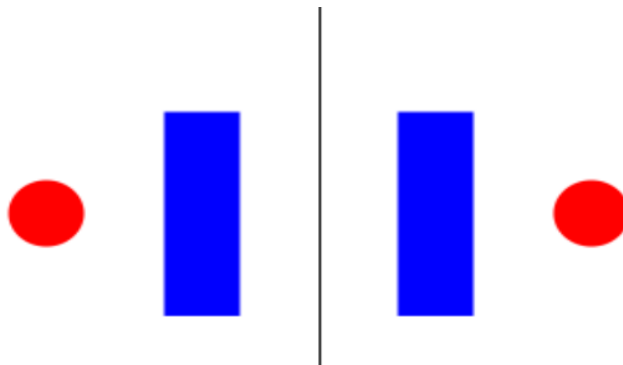
Instrumente Structurale
2014-2020

aranjată într-o manieră ordonată, totul își are locul său, ceea ce confirmă încă o dată perfecțiunea legilor naturii, în care simetria este condiția principală.

Obiectele sau părțile separate ale unui obiect simetric sunt, parcă, reflecții sau imagini unele ale altora în aceste planuri oglindă, numite planuri de simetrie.

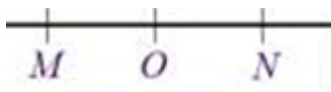
Cel mai simplu caz de simetrie este o astfel de aranjare a părților întregului, în care întregul este împărțit în două.

Un plan oglindă poate fi desenat mental prin corpul uman; părțile din dreapta și din stânga lui vor fi, așa cum ar fi, imagini una cu cealaltă în această oglindă și vor fi compatibile egale, ca, de exemplu, mâna dreaptă și stângă.



Simetria unui punct față de un punct

Spunem că punctele M și N sunt simetrice față de punctul O , dacă O este mijlocul segmentului MN .



$$\left. \begin{array}{l} A - O - A' \text{ coliniare} \\ AO = OA' \end{array} \right\} \Rightarrow O \text{ este centru de simetrie}$$

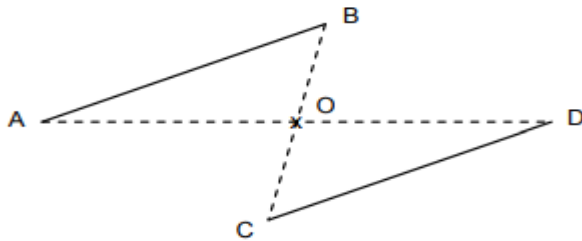
Simetricul segmentului $[AB]$ față de O este segmentul $[CD]$, congruent și paralel cu segmentul dat.



UNIUNEA EUROPEANĂ

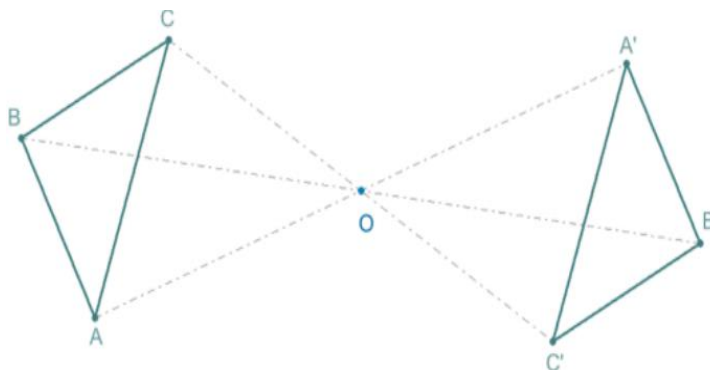


Instrumente Structurale
2014-2020



Simetricul triunghiului ABC fata de punctul O este triunghiul A'B'C' congruent cu triunghiul dat.

Simetricul segmentului [AB] fata de O este segmentul [A' B'], congruent și paralel cu segmentul dat, simetricul segmentului [CB] fata de O este segmentul [C' B'], congruent și paralel cu segmentul dat și Simetricul segmentului [AC] fata de O este segmentul [A' C'], congruent și paralel cu segmentul dat.



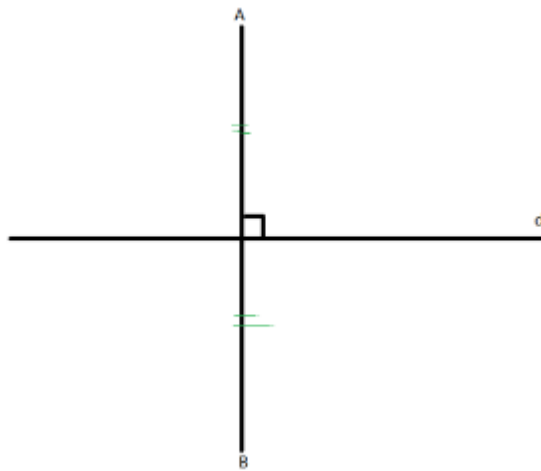
Spunem că un punct O este **centrul de simetrie** al unei figuri geometrice dacă orice punct al figuri are simetricul față de O tot un punct al figuri respective.

Exemplu: Paralelogramul și orice paralelogram particular are centru de simetrie -punctul de intersecție al diagonalelor.

Cercul are centru de simetrie - centrul cercului

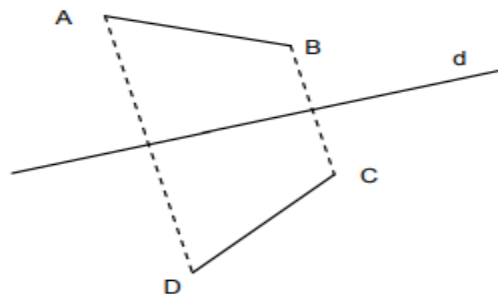
Simetria unui punct față de o dreaptă

Doa punct A și B se numesc simetrice fata de o dreapta d, daca dreapta d este mediatoarea segmentului [AB].



$d \perp AB$ și $AO = OB$ spunem că A și B sunt – simetrice față de dreapta d

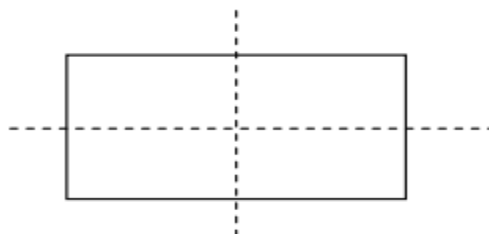
Exemplu: 1. Dacă D este simetricul lui A față de d și C este simetricul lui B față de d atunci simetricul segmentului [AB] față de d este [CD] .



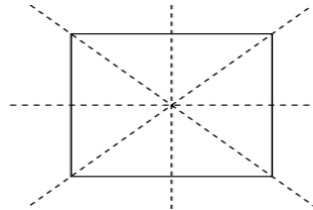
Axa de simetrie ale figurilor plane studiate:

O figură admite axă de simetrie dacă există o dreaptă ce împarte figura în două părți identice, adică prin suprapunere coincid.

- Mediatoarea unui segment este axa de simetrie a segmentului.
- Bisectoarea unui unghi este axa de simetrie a unghiului.
- Mediatoarea bazei unui triunghi isoscel este axa de simetrie a triunghiului.
- Mediatoarele laturilor unui triunghi echilateral sunt axe de simetrie ale triunghiului.
- Mediatoarele laturilor unui dreptunghi sunt axe de simetrie ale dreptunghiului.



- Diagonalele rombului sunt axe de simetrie ale sale.
- Pătratul are 4 axe de simetrie: diagonalele și mediatoarele laturilor.



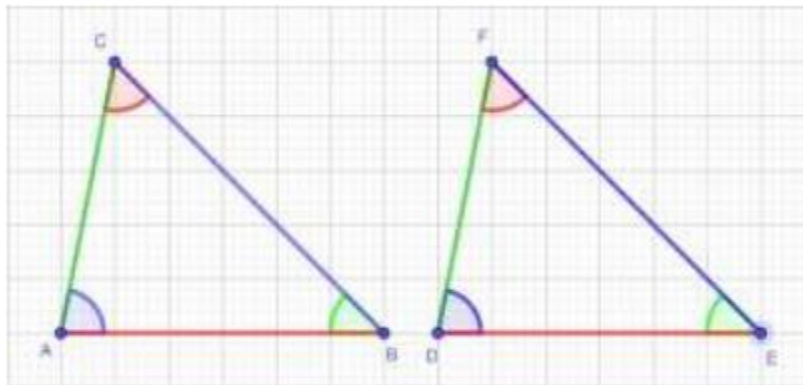
- Trapezul isoscel are o axa de simetrie: mediatoarea comună a bazelor.

Figuri congruente: Două sau mai multe figuri geometrice care au toate laturile și toate unghiurile congruente sunt figuri congruente. Putem identifica figurile congruente prin suprapunere, prin măsurare sau folosind proprietățile figurilor.

În general, dacă două figuri coincid prin suprapunere, spunem că ele sunt *congruente*.

CONGRUENȚA TRIUNghiURILOR:

Două triunghiuri se numesc congruente dacă au laturile și unghiurile omoloage, respectiv congruente.



$$AB \equiv DE, BC \equiv EF, AC \equiv DF \text{ și } \sphericalangle A \equiv \sphericalangle D, \sphericalangle B \equiv \sphericalangle E, \sphericalangle C \equiv \sphericalangle F \Rightarrow \triangle ABC \equiv \triangle DEF$$

Cazurile de congruență pentru triunghiurile oarecare (criterii de congruență a triunghiurilor):

1) CAZUL DE CONGRUENȚĂ L.U.L. (latură-unghi-latură)

Două triunghiuri care au două laturi și unghiul determinat de acestea respectiv congruente sunt congruente.

$$\text{Dacă } AB \equiv DE, \sphericalangle A \equiv \sphericalangle D, AC \equiv DF \Rightarrow \triangle ABC \equiv \triangle DEF$$

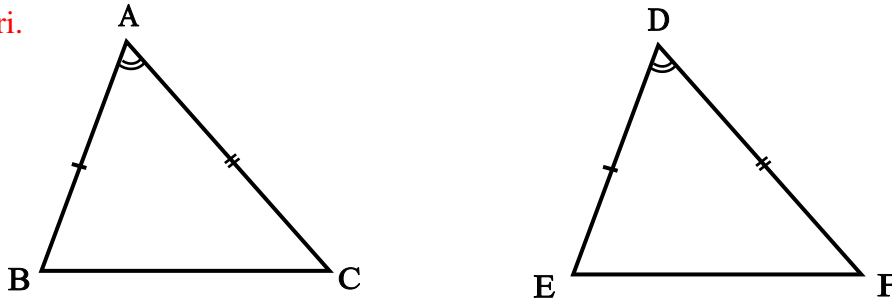


UNIUNEA EUROPEANĂ



Instrumente Structurale
2014-2020

Scrieți alte trei perechi de elemente congruente din care să rezulte congruența celor două triunghiuri.

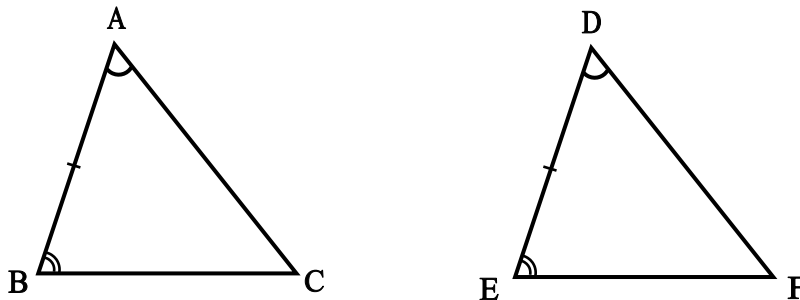


2) CAZUL DE CONGRUENȚĂ U.L.U. (unghi-latură-unghi)

Două triunghiuri care au câte o latură și unghiurile alăturate acestuia respectiv congruente sunt congruente.

Dacă $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle D$, $AB \equiv DE$ și $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle E \Rightarrow \triangle ABC \equiv \triangle DEF$

Scrieți alte trei perechi de elemente congruente din care să rezulte congruența celor două triunghiuri.

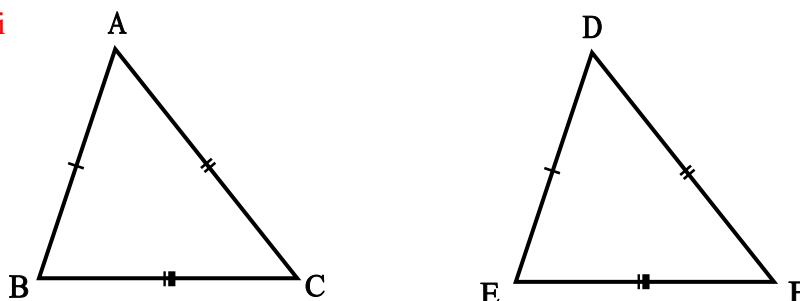


3) CAZUL DE CONGRUENȚĂ L.L.L. (latură-latură-latură)

Două triunghiuri care au laturile respectiv congruente sunt congruente.

Dacă $AB \equiv DE$, $BC \equiv EF$ și $AC \equiv DF \Rightarrow \triangle ABC \equiv \triangle DEF$

Scrieți alte trei perechi de elemente congruente din care să rezulte congruența celor două triunghiuri



Cazurile de congruență pentru triunghiurile dreptunghice:

1. CAZUL DE CONGRUENȚĂ C.C. (catetă, catetă)

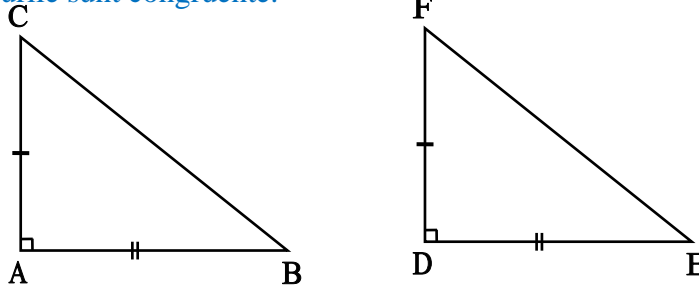


UNIUNEA EUROPEANĂ



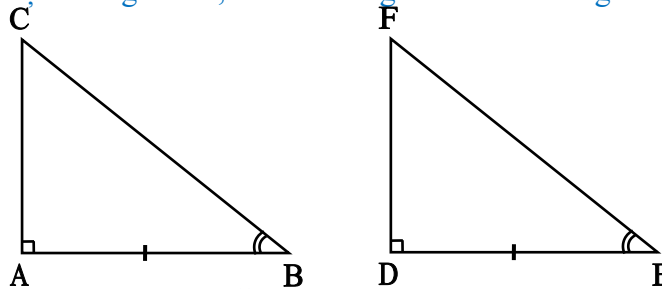
Instrumente Structurale
2014-2020

Dacă două triunghiuri dreptunghice au catetele două câte două congruente, atunci triunghiurile sunt congruente.



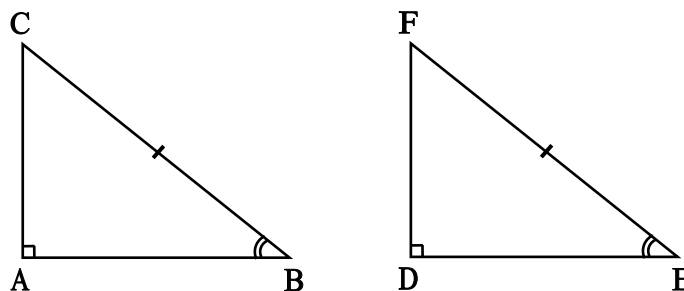
2. **CAZUL DE CONGRUENȚĂ C.U. (catetă, unghi)**

Dacă două triunghiuri dreptunghice au o pereche de catete congruente și o pereche de unghiuri ascuțite congruente, atunci triunghiurile sunt congruente.



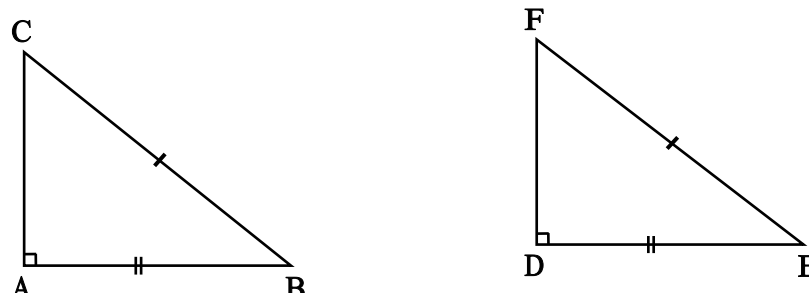
3. **CAZUL DE CONGRUENȚĂ I.U. (ipotenuză, unghi)**

Dacă două triunghiuri dreptunghice au ipotenuzele și o pereche de unghiuri ascuțite sunt congruente, atunci triunghiurile sunt congruente.



4. **CAZUL DE CONGRUENȚĂ I.C. (ipotenuză, catetă)**

Dacă două triunghiuri dreptunghice au ipotenuzele congruente și o pereche de catete congruente, atunci triunghiurile sunt congruente.





UNIUNEA EUROPEANĂ



Instrumente Structurale
2014-2020

Metoda triunghiurilor congruente este o metodă de demonstrație prin care se arată că două unghiuri sau două segmente sunt congruente.

Pentru a aplica această metodă în rezolvarea unei probleme de geometrie trebuie să găsiți două triunghiuri ce conțin segmentele sau unghiurile care trebuie să arătați că sunt congruente și să demonstrați congruența lor. Dacă demonstrați că triunghiurile sunt congruente, atunci rezultă și congruența laturilor respectiv a unghiurilor omoloage.

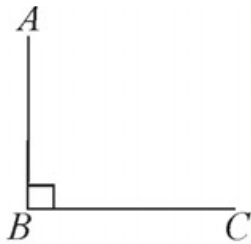
APLICAȚII

1. Desenează figuri geometrice cu următoarele figuri:

a)



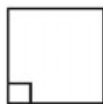
b)



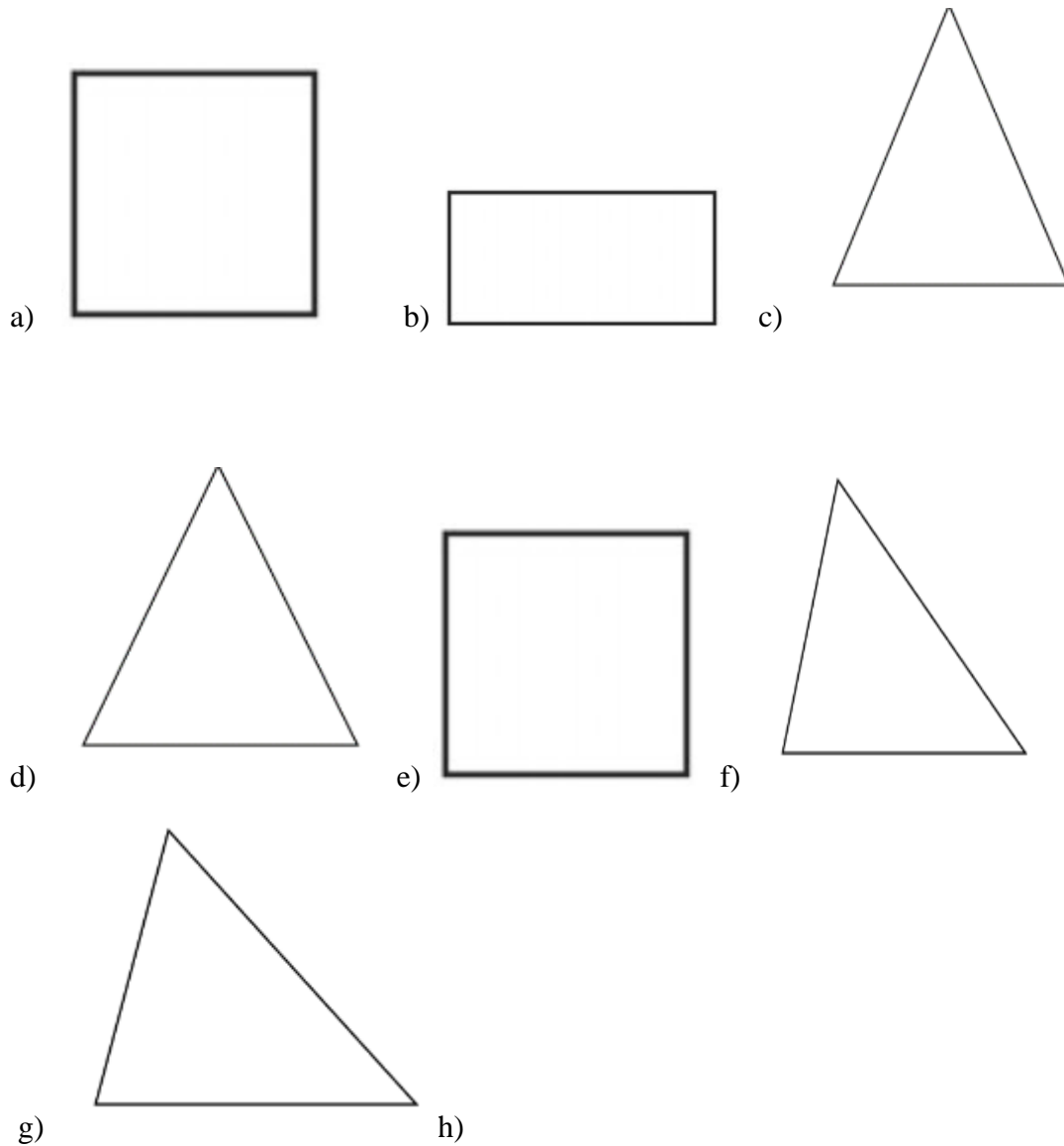
c)



d)



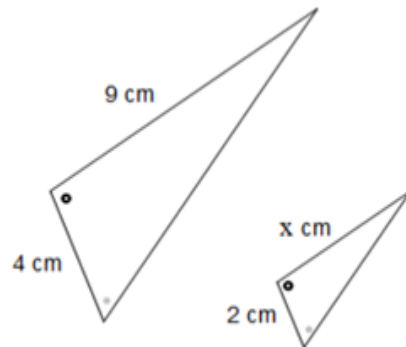
2. Găsește perechi de figuri geometrice congruente:



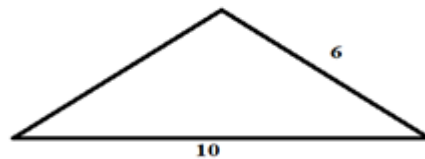
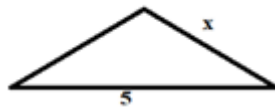
3. Fie ΔABC și $M \in (AB)$ și $N \in (AC)$ cu $MN \parallel BC$. Știind că $AM = 8$ cm, $CN = 6$ cm, $AC = 18$ cm calculați AN , MB , AB .
4. În triunghiul ABC se consideră punctele $D \in (AB)$ și $E \in (AC)$ astfel încât $DE \parallel BC$. Dacă $AD = 6$ cm, $DE = 3$ cm și $BC = 6$ cm, atunci determină lungimea laturii $[AB]$.

5. Aflați valoarea lui x știind că următoarele triunghiuri sunt asemenea:

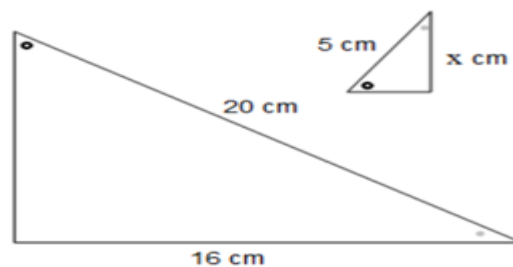
a)



b)



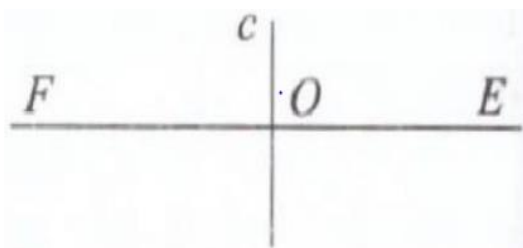
c)



6. Un bec este instalat pe un stâlp vertical la înălțimea de 6m. Un copil, înalt de 1,5 m se află la distanța de 5m față de baza stâlpului. Aflați lungimea umbrei copilului.

7. Dacă umbra unui copac are o lungime de 6 m și un elev se așează la o distanță de 3 m față de copac, astfel încât umbra lui să se suprapună cu umbra copacului. Dacă înălțimea elevului este de 1,80 m, iar umbra sa are o lungime de 2 m, să se afle înălțimea copacului.

8. Un proprietar are un teren în formă triunghiulară, delimitat de un gard pe distanța BC , ca în imagine. El dorește să mai construiască un gard pentru a separa curtea principală de grădina cu legume. Pentru a construi noul gard, el a fixat un stâlp în punctul M și mai trebuie fixat un al doilea stâlp în punctul N . Știind că $AM=30$ m, $MB=70$ m și $AC=180$ m, aflați la ce distanță față de punctul A trebuie poziționat stâlpul N , astfel încât cele două garduri să fie paralele.
9. Construiți centrul de simetrie al unui pătrat, al unui dreptunghi, al unui romb.
10. Precizează valoarea de adevăr pentru următoarele enunțuri:
- Un segment are două axe de simetrie.
 - Un unghi are o axă de simetrie.
 - Un pătrat are patru axe de simetrie.
 - Un dreptunghi are patru axe de simetrie.
 - Un triunghi echilateral are trei axe de simetrie.
 - Un triunghi isoscel are trei axe de simetrie.
 - Un cerc are o infinitate axe de simetrie.
11. Construiți triunghiul AEF simetricul triunghiului ABC față de A .
12. Construiți simetricul unui triunghi față de o dreaptă.
13. Construiți simetricul unui paralelogram față de o dreaptă.
14. Construiți axele de simetrie ale unui cerc. Câte sunt?
15. În figura alăturată punctul E este simetricul lui F față de dreapta c .



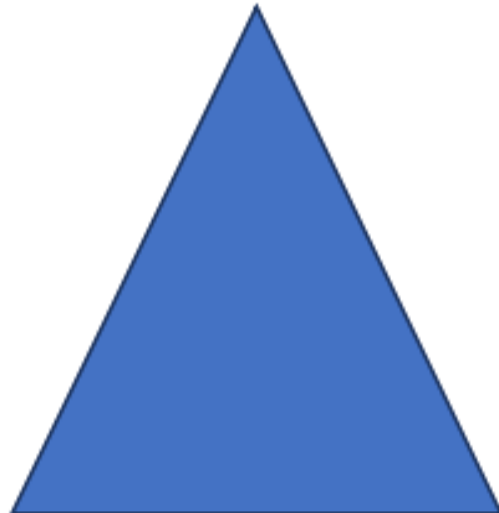
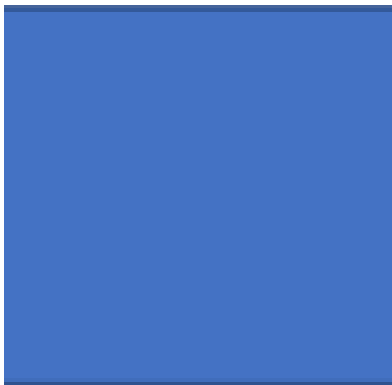
- Dacă $FO = 12$ cm, calculează lungimea segmentelor OE și FE .
 - Dacă $EF = 20$ cm, calculează lungimea segmentelor OE și FO .
16. Construiți axele de simetrie pentru următoarele figuri geometrice:



UNIUNEA EUROPEANĂ



Instrumente Structurale
2014-2020



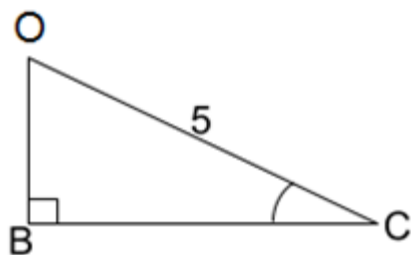
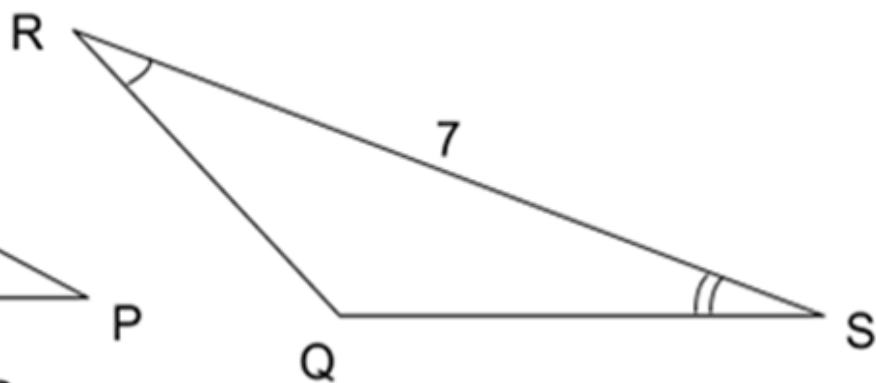
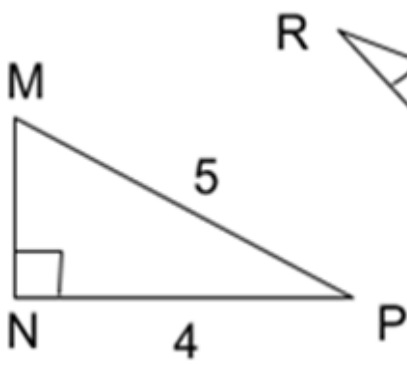
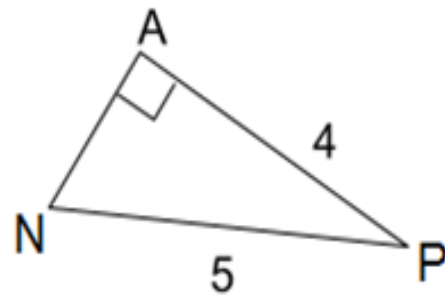
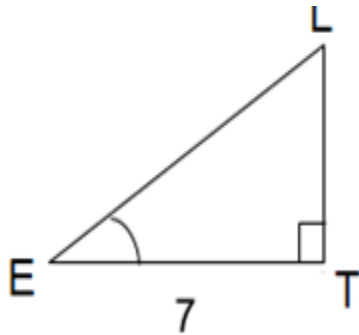
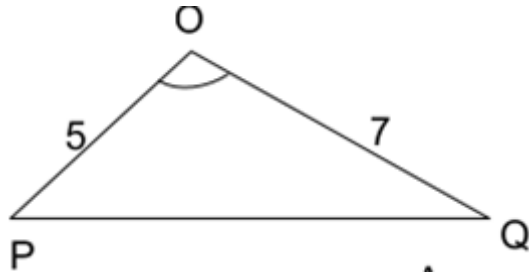
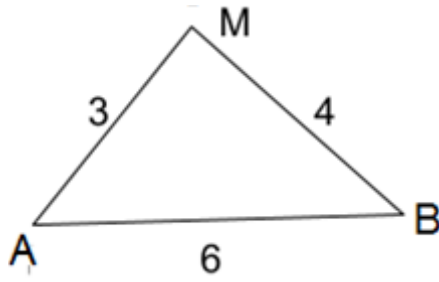


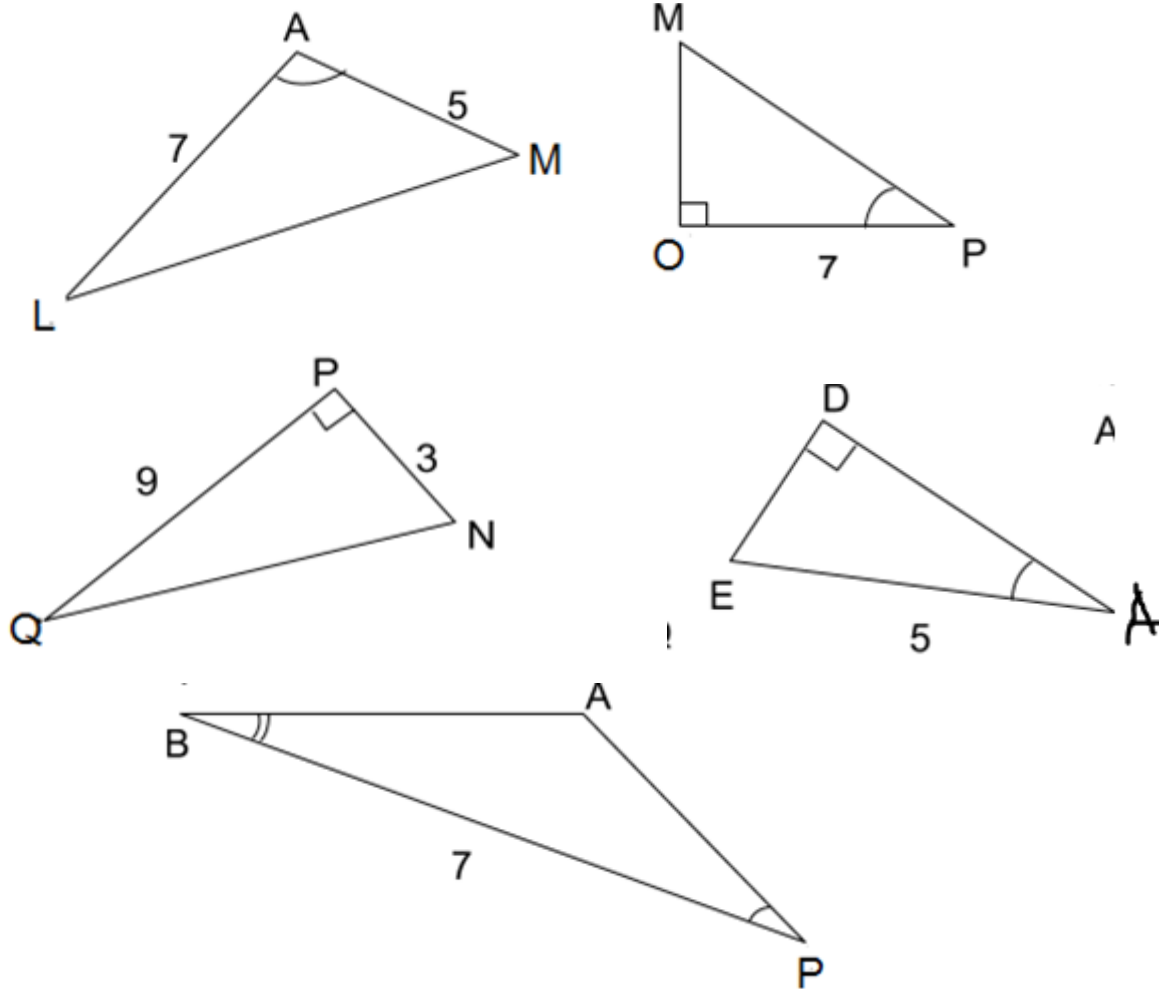
UNIUNEA EUROPEANĂ



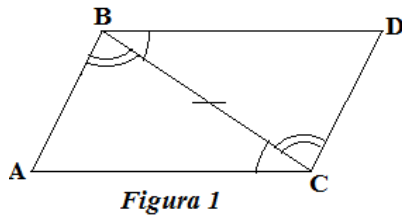
Instrumente Structurale
2014-2020

17. Analizând triunghiurile de mai jos scrieți perechi de triunghiuri congruente și precizați cazul de congruență:

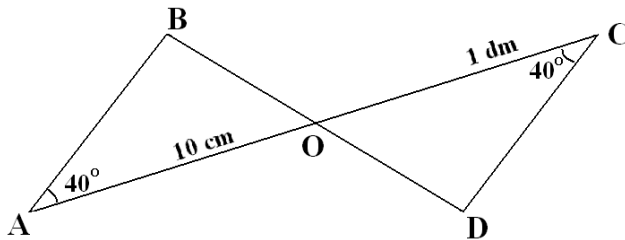




18. Triunghiurile ABC și MNP au $AB = 5$ cm, $BC = 7$ cm și $\sphericalangle B = 60^\circ$, respectiv $MN = 7$ cm, $MP = 5$ cm și $\sphericalangle M = 60^\circ$. Stabiliți dacă cele două triunghiuri sunt congruente.
19. Triunghiurile ABC și MNP au $AC = 10$ cm, $\sphericalangle A = 60^\circ$ și $\sphericalangle C = 45^\circ$, respectiv $NP = 10$ cm, $\sphericalangle N = 45^\circ$ și $\sphericalangle P = 60^\circ$. Stabiliți dacă cele două triunghiuri sunt congruente.
20. Triunghiurile ABC și MNP au $AB = 6$ cm, $BC = 5$ cm și $AC = 8$ cm, respectiv $MN = 6$ cm, $NP = 5$ cm și $MP = 8$ cm. Stabiliți dacă cele două triunghiuri sunt congruente.
21. Fie ABC un triunghi isoscel cu $AB \equiv AC$ și notăm cu S mijlocul laturii BC. Arătați că $\sphericalangle BAS \equiv \sphericalangle CAS$.
22. În *figura 1*, sunt marcate elementele congruente ale celor două triunghiuri. Ținând cont de criteriului de congruență U.L.U. și de ordinea literelor din membrul stang, completați membrul drept al congruenței de triunghiuri : $\triangle ABC \equiv \triangle \dots$



23. Dacă $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$, $AB=5\text{cm}$, $AC=6\text{cm}$, $BC=7\text{cm}$, atunci $DE=.....$, $EF=.....$, $DF=.....$,
24. Dacă $\triangle ABC \equiv \triangle MNP$, $\sphericalangle A=40^\circ$, $\sphericalangle B=60^\circ$, atunci: $\sphericalangle N = \dots$, $\sphericalangle M = \dots$, $\sphericalangle P = \dots$,
25. Triunghiul ABC este dreptunghic în A și are măsura $\sphericalangle B=60^\circ$. Dacă $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$, atunci: $\sphericalangle E= \dots$, $\sphericalangle D = \dots$, $\sphericalangle F= \dots$,
26. În triunghiul ABC, $AB=AC$, M este mijlocul segmentului (BC). Demonstrați că $\sphericalangle BAM \equiv \sphericalangle CAM$.
27. Analizând figura alăturată demonstrează că $AB = DC$ și $BO = OD$.



25. Se consideră triunghiurile asemenea $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. Dacă $AB = 6\text{ cm}$, $AC = 8\text{ cm}$, $EF = 5\text{ cm}$ și valoarea raportului de asemănare este egală cu $\frac{1}{2}$. Calculați:

- Lungimile laturilor (DE) și (DF);
- Perimetrul triunghiului ABC;
- Raportul ariilor celor două triunghiuri.